一変数特殊関数再訪(超幾何函数の総合的理解)

木村, 弘信

数理解析研究所講究録
919巻 1995年 1-11

一変数特殊関数再訪

木村 弘信　熊本大学理学部

1　はじめに

この講演では, 一変数特殊関数について初心者向けの解説を行うことを目的とする. 具体的には, ガウスの超幾何関数とその合流型関数, すなわち クンマーの合流超幾何関数, ベッセル関数, エルミート関数そしてエアリ関数についてである. これらの関数については, 犬井鉄郎先生の名著「特殊関数」 岩波全書 に詳しく解説されているし, 公式集でも知ることができるから, さまざまな公式を列挙しても仕方がないであろう. むしろ, 初心者の一人として, 特殊関数という対象をどのように理解したらいいのかを素朴に考えてみようと思う.

特殊関数, とくにガウスの超幾何関数とその一族については, オイラー以来多くの研究があり, 膨大な知識の集積があるようである. これらの関数の出所はいろいろあるが, ラプラス方程式, 波動方程式等の偏微分方程式のさまざまな座標系に関する変数分離による解の構成はその一つである. そして, 関数がどのような問題と関係するかに応じて数多くの公式が得られてきた. このような歴史的背景に縁遠い初心者にとっては, 公式集にでてくるさまざまな公式などは, 訳の分からない煩雑な知識の集積と写るのではないだろうか. それは, 大方の数学者にとっても状況は変わらないように思える. ましてや前世紀から行われてきた, これら一変数特殊関数の多変数関数への拡張の試みは, その多くは人工的なもので, 多くの数学者の興味を引くものではなかったと思われる.

1975年に, 青本はガウスの超幾何関数のオイラー積分表示に注目し, 超幾何関数を一次式のべき積の積分として一般化した. その後の発展は, 最近刊行された [AK] によって知ることができる. 1986年に Gel'fand はべき積の群論的意味を明確にすることによって, より一般の超幾何関数の

定式化に到達している．ここでは，この Gel'fand の定式化をまねて，ガウスの超幾何関数だけでなく，合流型と呼ばれている特殊関数もとらえ直してみる．

2 ガウスの超幾何関数

ガウスの超幾何関数は，べき級数

$$F(a,b,c;x):=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}x^m \tag{1}$$

によって定義される．ここで，c は負の整数ではなく

$$\begin{aligned}(a)_m: &= \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1) & m\geq 1\\ 1 & m=0\end{cases}\\ &= \Gamma(a+m)/\Gamma(a),\end{aligned}$$

$\Gamma(a)$ は，オイラーのガンマ関数である．この級数は $|x|<1$ で収束し，そこで正則関数を表す．よく知られているように $y(x)=F(a,b,c;x)$ は $\mathbf{P}^1$ 上のフックス型微分方程式

$$x(1-x)y''+\{c-(a+b+1)x\}y'-aby=0 \tag{2}$$

を満たす．方程式の特異点は

$$\{0,1,\infty\}$$

である．逆に $y(0)=1$ を満たす (2) の正則解は $F(a,b,c;x)$ であることが容易に検証できる．

命題 1 ガウスの超幾何関数は，仮定 $\Re(a)>0,\Re(c-a)>0$ の下で，次の積分表示を持つ:

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du. \tag{3}$$

(3) において，被積分関数は $\mathbf{C}$ における多価関数であるから，積分が意味を持つためには多価関数の分枝を指定しなければならない．ここでは，$|x|<1$ のとき

$$\arg u=0,\quad \arg(1-u)=0,\quad |\arg(1-xu)|<\pi/2$$

となるように指定する. (3) を, 超幾何関数のオイラー積分表示という. ちなみに $(1-xu)^{-b}$ はオイラー核と呼ばれている. 命題 1 の仮定は, 積分が収束することを保証する. これがないときは, 発散積分の有限部分をとって意味を付ける.

3 超幾何関数の退化

特殊関数の本をみると, ガウスの超幾何関数の他に代表的なものとして合流型関数というものが扱われている. それらは, 通常 クンマーの合流超幾何関数, ベッセル関数, エルミート関数そして エアリ関数である. もちろん, そのほかにもさまざまな variation はある. いずれも 2 階微分方程式の解であり、次のような積分表示を持っている:

$$
\begin{array}{rcl}
F(a,b,c;x) = & C_1 \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du & \text{ガウス} \\
{}_1F_1(a,c;x) = & C_1 \int_0^\infty e^{xu}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du & \text{クンマー} \\
J_a(x) = & C_2 \int_{\gamma_1} e^{\frac{x}{2}(u-u^{-1})}u^{-a-1}du & \text{ベッセル} \\
H_a(x) = & C_3 \int_{-\infty}^\infty e^{2xu-u^2}u^{a-1}du & \text{エルミート} \\
Ai(x) = & C_4 \int_{\gamma_2} e^{-xu+u^3/3}du & \text{エアリ.}
\end{array}
$$

上の積分にあらわれる積分路 γ_1, γ_2 は, 関数の微分可能性や, 部分積分をしても積分の項以外はでてこない事を保証するようにとる. このようにとっておくと, 上記の関数たちは, それぞれ次の微分方程式を満たすことが分かる.

$$
\begin{array}{ll}
x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0 & \text{ガウス} \\
xy'' + (c-x)y' - ay = 0 & \text{クンマー} \\
x^2y'' + xy' + (x^2-a^2)y = 0 & \text{ベッセル} \\
y'' - 2xy' - 2ay = 0 & \text{エルミート} \\
y'' - xy = 0 & \text{エアリ}
\end{array}
$$

さて, ガウスを除いた合流型の関数や方程式は, ガウスのそれが退化したものといわれることが多い. その意味は, 一つは方程式の特異点の合流ということで説明される. 例を挙げる. ガウスの方程式 (2) において独立変数とパラメータの変換

$$x = \epsilon\xi,\ b = 1/\epsilon \tag{4}$$

を考える. すると (2) は

$$\xi(1-\epsilon\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\{c-(a+1/\epsilon+1)\epsilon\xi\}\frac{dy}{d\xi}-ay=0 \tag{5}$$

と書き直される. 極限 $\epsilon\to 0$ をとると, クンマーの方程式を得る. この極限操作において, 方程式の特異点に関してどういうことが起こっているかを考える. 方程式 (2) では特異点は $\{0,1,\infty\}$ で, それらはすべて確定特異点である. 変換 (4) によって (2) の特異点は $\{0,1/\epsilon,\infty\}$ となり, ϵ を 0 に近づけるとき, $1/\epsilon$ は ∞ に近づいていく. 極限では ∞ に "合流" してしまう. この結果, 二つの確定特異点 $\{1,\infty\}$ から一つの不確定特異点∞が生じる. このような極限操作は "特異点の合流" と呼ばれている. それでは関数のレベルでどのようなことが起きているだろうか. 級数 (1) に変換 (4) を行うと

$$\sum_m \frac{(a)_m(1/\epsilon)_m}{(c)_m(1)_m}(\epsilon\xi)^m$$

を得るが,

$$\lim_{\epsilon\to 0}(1/\epsilon)_m\epsilon^m=1$$

を用いて, クンマーの合流超幾何関数の級数表示を得る:

$${}_1F_1(a,c;\xi)=\sum_m \frac{(a)_m}{(c)_m(1)_m}\xi^m.$$

また, 積分表示のレベルではオイラー核 $(1-xu)^{-b}$ が $e^{\xi u}$ とラプラス核に極限移行することに対応している:

$$\begin{aligned}
F(a,b,c;x) &= C_1\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du\\
&= C_1\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-\epsilon\xi u)^{-1/\epsilon}du\\
&\to C_1\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}e^{\xi u}du
\end{aligned}$$

特異点の合流という考え方からすると, クンマーの方程式から得られるのはエルミートの微分方程式で, そのほかのベッセル、エアリの方程式は得られない. 通常は, これらはクンマーの方程式の特殊な場合として論じられることに注意しておこう. ところで, この節のはじめに list up した方程式や積分表示は, いったいどのような原理でできているのであろうか. そして合流の操作やこれらの特殊関数について成り立つ公式は, どのように理解できるのだろうか?

4 ガウスの超幾何の一つの理解の仕方

ガウスの超幾何関数の積分表示を, 青本とGel'fandの考え方に従って見直してみよう. 定数 C_1 を省略して

$$F = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du$$

を考える. 被積分関数は次のように構成されていることが分かる.

[I] 3 変数関数

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, y_3) &= y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} y_3^{\alpha_3} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (a-1, c-a-1, -b) \end{aligned}$$

を考える.

[II] f に u の一次式を代入:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) &= (u, 1-u, 1-xu) \\ &= (0, 1, 1) + u(1, -1, -x) \\ &= (1, u)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

そして , 一次式の零点 $u=0$ と $u=1$ を結ぶ線分上で u に関して積分する.

Process [II] は, 次のように考えることができる: $\mathbf{R}^3$ において

$$f = (y_1)_+^{\alpha_1}(y_2)_+^{\alpha_2}(y_3)_+^{\alpha_3}$$

を考え, y-空間において (6) でパラメータ表示される直線 L 上に制限して積分する. つまり, 定数倍の ambiguity は残るものの, いわゆる Radon 変換を考えていることになる. これを複素変数に拡張するには, f を $\mathbf{C}^3$ 上の多価解析関数とみて, 積分変数も $\mathbf{C}$ の中の線分 $(0, 1)$ を動くと考える. 次に, 積分 F の別な表示を考えてみよう. F において, 積分変数の変換 $v = 1/u$ を行うと,

$$F = \int_1^\infty v^{b-a}(v-1)^{c-a-1}(v-x)^{-b}dv$$

積分の範囲を考えるときに, 被積分関数に現れる一次式の零点をつなぐ path をとるという単純な原則は成り立たない. ここでは, $v=1$ と, (この表示からは見えない) ∞ を結んでいる. つまり, 上のような積分表示をみても, ∞ を頭の中で意識しなければならないのである. それならば, ∞ が見えるように表示の仕方を変えてしまった方が自然であろう.

そこで, 積分変数の空間 $\mathbf{C}$ のコンパクト化 $\mathbf{P}^1$ を考えて, F を $\mathbf{P}^1$ の homogeneous coordinate で書き換えることを考える. (t_0,t_1) を $\mathbf{P}^1$ の homogeneous coordinate とする. $u\in\mathbf{C}\subset\mathbf{P}^1$ は $u=t_1/t_0$ によって決まっているとする. すると

$$F=\int_\gamma t_0^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-2}t_1^{\alpha_1}(t_0-t_1)^{\alpha_2}(t_0-t_1x)^{\alpha_3}\cdot\tau,\qquad \tau:=t_0dt_1-t_1dt_0.$$

ここで

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2=0 \tag{7}$$

という関係で α_0 を定めることにすれば表示はパラメータに関して対称な形になる. さて, 新しく $t_0^{\alpha_0}$ という項が現れたが, これが見えなかった点 $u=\infty$ における情報を担っている部分である.

この積分をもう一度次のように解釈し直そう.

- H を 対角行列からなる $GL(4)$ の可換部分群とする. すなわち, 4 個の複素トーラスの直積群 $(\mathbf{C}^\times)^4$ に同型な群である. $\tilde{H}$ をその普遍被覆群とする. $\chi:\tilde{H}\to\mathbf{C}^\times$ を解析的準同型 (指標) とする. これは, 適当な $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_3)\in\mathbf{C}^4$ をとって

$$\chi(y;\alpha)=\prod_{0\le i<4}y_i^{\alpha_i}$$

で与えられる. α は (7) を満たすという仮定をおく.

- χ に (t_0,t_1) の斉次一次式

$$(y_0,y_1,y_2,y_3)=(t_0,t_1)z'$$

を代入する. ここで

$$z'=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-x\end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{C}^2$ 上の多価な一次微分形式 $\chi(tz';\alpha)\tau$ は, 仮定 (7) の下で $\mathbf{P}^1$ 上の一次微分形式と見なすことができて, それを 0 を 1 に結ぶ path 上で積分する.

さて, それではなぜ, 行列 z' で指定される特別なline L 上で積分するのであろうか? そこで, もっと一般のline上で積分したらどうなるかを考察する.

5 Aomoto-Gelfand 超幾何関数 (on $Z_{2,4}$)

2×4 複素行列の空間

$$Z := \{z=(z_0,z_1,z_2,z_3)\in M(2,4)\ ;\ \text{すべての 2-minor は non-zero}\}$$

を考える. これは一次式を決めるデータの空間である. $\chi:\tilde{H}\to\mathbf{C}^\times$ を指標とすることは, 前節のとおりとする. 積分

$$F(z;\alpha) := \int_\gamma \chi(tz;\alpha)\tau$$

を考える. ここで, γ は z_0,z_1,z_2,z_3 が定める $\mathbf{P}^1$ 上の 4 点のdual の点を t-space の点と考え, そのうちの 2 点をつなぐpath である. 実際には, path γ 上で被積分関数の分枝を定めなければいけないのだが, ここでは rough な言い方をしておく. すると次が成り立つ:

命題 2 F は次を満たす:

$$\begin{aligned} F(gz;\alpha) &= \det(g)^{-1}F(z;\alpha), g\in GL(2) \\ F(zh;\alpha) &= \chi(h;\alpha)F(z;\alpha), h\in\tilde{H} \end{aligned}$$

この命題が意味することは次のとおりである. Z への $GL(2)\times\tilde{H}$ の作用に関する z の orbit $O(z)$ を考えよう. 命題によれば, $O(z)$ 上の F の値は, z における F の値から簡単なfactor をそれにかけることによって知ることができる. すなわち, 本質的な部分は, 各orbit 上に代表点を定めてその点における F の値を知ることである.

$$X(2,4) := GL(2)\setminus Z/H$$

とおく. F の本質的な部分は $X(2,4)$ 上の多価関数として理解される. ちなみに, $X(2,4)$ は, グラスマン多様体 $Gr_{2,4}$ のZariski open set $GL(2)\setminus Z$

に複素トーラス H が作用したときの orbit の空間と考えてもよいし, $\mathbf{P}^1$ 上の相異なる 4 点の空間 Z/H に射影変換群 $PGL(2)$ が作用しこの作用によって移りあう点の組は同一視した空間ともみなせる. すなわち, $\mathbf{P}^1$ 上の一般の位置にある 4 点のなす配置空間である. 射影変換によって $\mathbf{P}^1$ 上の任意の異なる 3 点は $\{\infty, 0, -1\}$ に移せることに注意すると, 次の命題を得る.

命題 3 任意の $z \in Z$ に対して, $g \in GL(2), h \in H$ が存在して

$$gzh = z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$$

とできる. これにより $X(2,4)$ は $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ に双正則な複素多様体である.

以上の考察を (rough に標語的に) まとめると

> ガウスの超幾何関数は, Cartan subgroup $H \subset GL(4)$ の普遍被覆群の指標のラドン変換を考え, それを $GL(2) \times H$ の作用によって変数分離したものである.

6 クンマー, ベッセル, エルミート そして エアリ

第 2 節に挙げた, クンマー, ベッセル, エルミート, エアリ等の合流型超幾何関数はどのようにとらえられるであろうか?

方針は単純で, $GL(4)$ の対角行列のなす可換部分群の代わりに次のような $GL(4)$ の可換部分群を考える. それらは 4 の分割によって index 付けされている. $H_{(1,1,1,1)}$ は上に述べた Cartan subgroup で,

$$H_{(2,1,1)} : = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & & \\ & x_0 & & \\ & & x_2 & \\ & & & x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_{(2,2)} : = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & & \\ & x_0 & & \\ & & x_2 & x_3 \\ & & & x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_{(3,1)}: = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \\ & x_0 & x_1 & \\ & & x_0 & \\ & & & x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_{(4)}: = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_0 & x_1 & x_2 \\ & & x_0 & x_1 \\ & & & x_0 \end{pmatrix} \right\}$$

を考える. そして, これらの群の普遍被覆群の指標を考え, その“ラドン変換” として一般超幾何関数を定義する. ただし, 指標に代入する一次式を指定するデータの空間 Z は群に応じて変えなければいけない. 詳しくは, [KHT1] 参照.

では, 上の 4 の分割に応じて定まる $GL(4)$ の可換部分群とはいったい何であろうか?

答えは, $GL(4)$ の regular element (正則元) の centralizer である. ここで 正則元とは, $GL(4)$ の元で, 随伴作用によるその軌道の次元が最大となるものである. たとえば, semi-simple な regular element は すべての固有値が相異なる元である. そして, 線形代数から明らかなように, それらは対角行列と共役で, 対角行列で与えられる正則元の centralizer は, すべての正則な対角行列からなる群となる. すなわち, $H_{(1,1,1,1)}$ である. 必ずしも, semi-simple でない正則元の centralizer は, 正則元の固有値の重複度を指定すると共役を除いて定まり, その代表が上に list up した群たちである. 群 H_λ の suffix となっている 4 の分割 λ は, 正則元の固有値の重複度を表している.

古典的な合流型超幾何関数と 4 の分割との対応は次のとおり:

$$\begin{aligned} \lambda &= (1,1,1,1) \leftrightarrow \text{ガウスの超幾何関数} \\ \lambda &= (2,1,1) \leftrightarrow \text{クンマーの合流超幾何関数} \\ \lambda &= (2,2) \leftrightarrow \text{ベッセル関数} \\ \lambda &= (3,1) \leftrightarrow \text{エルミート関数} \\ \lambda &= (4) \leftrightarrow \text{エアリ関数.} \end{aligned}$$

古典的超幾何関数の一族のこのような理解の仕方によって, 今まで知られている事実はどのように見えてくるだろうか? たとえば, 次のことが分かる.

- 合流という操作は, 実は $GL(4)$ の様々なタイプの正則元たちの間の隣接関係を具体的に書き下したものと理解できる.

- ガウスの超幾何関数について知られている"クンマーの 24 個の解は, 空間 Z への $GL(4)$ の Weyl 群の作用の結果として得られ, クンマーの合流超幾何関数にたいして知られている第二変換公式

$$ {}_1F_1(a,c;x) = e^x {}_1F_1(c-a,c;-x) $$

も同様な理解の仕方ができる, [KK] 参照.

- 上の特殊関数のうちエアリ関数を除いたものは, すべてパラメータを含んでいる. そしてそのパラメータを整数だけずらして得られる関数は元の関数に適当な微分作用素を施すことによって表現できる. これは隣接関係式と呼ばれているが, 上の理解の仕方によれば, $GL(4)$ の Lie 環の, $Lie\,H$ に関する root space 分解によって説明できる等である, [KHT2] 参照,

他にも論ずべきことは多いが, ここでこの拙い解説を終わる.

参考文献

[A] K. Aomoto, Les équation aux différences linéaires et les intégrales des functions multiformes, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **22** (1975), 271–297.

[AK] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー.フェアラーク東京 (1994).

[GRS] I. M. Gelfand, V. S. Retahk, and V. V. Serganova, Generalized Airy functions, Schublrt cells, and Jordan groups, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **298** (1988), 17–21.

[KHT1] H. Kimura, Y. Haraoka and K. Takano, The generalized confluent hypergeometric functions, Proc. Japan Acad. **68** (1992), 290–295.

[KHT2] H. Kimura, Y. Haraoka and K. Takano, On confluences of the general hypergeometric systems, Proc. Japan Acad., **69** (1993) 99–104.

[KHT3] H. Kimura, Y. Haraoka and K. Takano, On contiguity relations of the confluent hypergeometric systems, Proc. Japan Acad., **70** (1994) 47–49.

[KK] H. Kimura and T. Koitabashi, Normalizer of maximal abelian subgroups of $GL(n)$ confluent hypergeometric functions, (1994) preprint.